Ejercicios Mecánica Teórica. Capítulo 15

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

3 de agosto de 2019

Sea la acción

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t$$

Y sea la transformación

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \qquad x' = \gamma(-\beta ct + x) \tag{1}$$

Con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $\beta = \frac{v}{c}$

1. Demostrar que la transformación deja invariante la acción.

Tenemos que demostrar que $S[x'(t')] = S[x(t)]$

$$S[x'] = \int_{t'_1}^{t'_2} -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}'^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t' \tag{2}$$

Primero tenemos que calcular $\dot{x}'$:

$$\dot{x}' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{\partial x'}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} + \frac{\partial x'}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} \tag{3}$$

$$= \frac{\partial x'}{\partial x}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial t'}{\partial x}\right)^{-1} + \frac{\partial x'}{\partial t}\left(\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} \tag{4}$$

$$= \gamma\left(\frac{\gamma}{\dot{x}} - \frac{\gamma\beta}{c}\right)^{-1} - \beta\gamma c\left(\gamma - \frac{\beta\gamma}{c}\dot{x}\right)^{-1} = \frac{\dot{x}c}{c-\beta\dot{x}} - \beta c\frac{c}{c-\beta\dot{x}} = \frac{\dot{x}-\beta c}{1-\frac{\beta\dot{x}}{c}} \tag{5}$$

Y

$$\mathrm{d}t' = \frac{\partial t'}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial t'}{\partial x}\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial t'}{\partial x}\dot{x}\right)\mathrm{d}t = \frac{\gamma}{c}\left(c - \beta\dot{x}\right)\mathrm{d}t \tag{6}$$

Entonces,

$$S[x'] = \int_{t_1}^{t_2} -m\gamma c\sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}-\beta c}{c-\beta\dot{x}}\right)^2}\,(c-\beta\dot{x})\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} -m\gamma c\sqrt{\left(c-\beta\dot{x}\right)^2-\left(\dot{x}-\beta c\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} -m\gamma c\sqrt{\left(1-\beta^2\right)\left(c^2-\dot{x}^2\right)}\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} -mc^2\gamma\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t = S[x] \tag{9}$$

Donde al final he usado que $\gamma\sqrt{1-\beta^2} = 1$, demostrando que la acción es, en efecto, invariante bajo esas transformaciones.

2. Encontrar las transformaciones infinitesimales

Primero tenemos que notar que el parámetro que genera las transformaciones, tal como ha dicho Javier en el vídeo, es V. Las transformaciones infinitesimales serán, por lo tanto, las que cumplen que $V \ll c$, en este caso $\beta \ll 1$ y tenemos que

$$\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \mathcal{O}\left(\beta^2\right) \tag{10}$$

Por lo tanto

$$ct' = \left(1+\mathcal{O}\left(\beta^2\right)\right)(ct-\beta x) = ct - \beta x + \mathcal{O}\left(\beta^2\right) \Longrightarrow \delta t = -\beta\frac{x}{c} \tag{11}$$

$$x' = \left(1+\mathcal{O}\left(\beta^2\right)\right)(-\beta ct + x) = x - \beta ct + \mathcal{O}\left(\beta^2\right) \Longrightarrow \delta x = -\beta ct \tag{12}$$

Finalmente, para calcular la variación $\delta\dot{x}$ lo que tenemos que calcular es

$$\delta\dot{x} = \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} = -\beta c \tag{13}$$